



*Инвариант*

- 1** Какое число нужно вычесть из числителя дроби  $\frac{537}{463}$  и прибавить к её знаменателю, чтобы после сокращения получить  $\frac{1}{9}$ ?
- 2** На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?
- 3** На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут доньшком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?
- 4** В пробирке находятся марсианские амёбы трёх типов  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Две амёбы любых двух разных типов могут слиться в одну амёбу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амёба. Каков её тип, если исходно амёб типа  $A$  было 20, типа  $B$  — 21, типа  $C$  — 22?
- 5** а) В таблице  $8 \times 8$  угловая клетка закрашена чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.  
б) То же утверждение для таблицы  $3 \times 3$ .
- 6** На доске выписаны числа  $1, 1/2, \dots, 1/100$ . Разрешается стереть любые два числа  $a$  и  $b$  и заменить их на число  $ab + a + b$ . Какое число останется после 99 таких операций?



*Инвариант*

- 1** В ряд выписаны числа  $1, 2, \dots, 99, 100$ . Можно менять местами два числа, стоящие через одно. Можно ли получить ряд  $100, 99, \dots, 2, 1$ ?
- 2** Лягушка прыгает вдоль прямой. Сначала она прыгнула на 1 см, затем на 3 см (в том же или в противоположном направлении), затем на 5 см и т. д. Могла ли она вернуться в исходную точку после 2017-го прыжка?
- 3** Какое число нужно вычесть из числителя дроби  $\frac{537}{463}$  и прибавить к её знаменателю, чтобы после сокращения получить  $\frac{1}{9}$ ?
- 4** На каждом километре шоссе между сёлами Ёлкино и Палкино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано, сколько километров до Ёлкино, а на другой — до Палкино. Боря заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр равна 13. Каково расстояние от Ёлкино до Палкино?
- 5** На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут доньшком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?
- 6** У племени альтеков было 24 слитка золота, 26 редких жемчужин и 25 стеклянных бус. У Кортеса они могут обменять слиток золота и жемчужину на одни бусы, у Монтесумы — один слиток и одни бусы на одну жемчужину, а у тотонаков — одну жемчужину и одни бусы на один золотой слиток. После долгих обменов у альтеков осталось только одна вещь. Какая?