

Графом называется множество вершин на плоскости и ребёр, их соединяющих. Будем считать, что граф не содержит петель и кратных ребёр.

Степень вершины – количество ребёр, выходящих из этой вершины.

1. В графе **а)** пять; **б)** одиннадцать; **в)** n вершин. Любые две вершины соединены ребром (такой граф называется *полным*). Сколько в нём рёбер?

2. В графе с девятью вершинами степень каждой вершины равна 2. Нарисуйте все такие графы.

3. Докажите, что в любом графе найдутся две вершины одинаковой степени.

4. Верно ли, что два графа одинаковы, если

а) у них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9?

б) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3?

в) они связны, без циклов и содержат по 6 рёбер?

Граф называется **плоским**, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались. Пусть V – число вершин графа, P – число рёбер, Γ – число граней (кусков, на которые граф разбивает плоскость).

Граф **связный**, если от любой его вершины до любой другой можно пойти по рёбрам графа.

Теорема. Для любого плоского связного графа $V - P + \Gamma = 2$.

5. В стране 7 озёр, соединённых между собой 10 каналами, причём от любого озера можно доплыть до любого другого по каналам. Сколько в стране островов?

6. На плоскости расположены **а)** 4 точки, каждая из которых соединена отрезками с тремя другими (без пересечений);

б) 6 точек, каждая из которых соединена отрезками с четырьмя другими (без пересечений).

Посчитайте по формуле Эйлера, на сколько частей делит плоскость изображённая картинка. Нарисуйте, как могла бы выглядеть эта картинка.

7. Докажите, что для любого плоского связного графа, в котором есть хотя бы два ребра, $2P \geq 3\Gamma$.

8. Докажите, что для любого плоского связного графа, в котором есть хотя бы два ребра, $P \leq 3V - 6$.