Математические кружки МПГУ **16 ноября 2019 года**

8-9 класс *Алгоритм Евклида*

НОД двух чисел можно найти, разложив оба этих числа на множители. Но, вообще говоря, разложение на множители – довольно трудоёмкая задача. Оказывается, найти НОД двух чисел можно, не раскладывая их на множители. Для этого есть *алгоритм Евклида.*

-1. а) Пусть $a \geqslant b$. Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a - b, b)$.
б) *(шаг алгоритма Евклида)* Пусть a и b – натуральные числа и $a > b$. Поделим a на b с остатком: $a = bq + r, 0 \leqslant r < b$. Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).

Алгоритм Евклида. Для вычисления НОД(a, b) начнём с пары чисел (a, b) и будем применять шаги, описанные в предыдущей задаче. При каждом переходе от пары *(делимое, делитель)* к паре *(делитель, остаток)* оба числа в паре уменьшаются, а их НОД сохраняется. В некоторый момент получим пару $(d, 0)$, причём $d =$ НОД(a, b).

0. При помощи алгоритма Евклида найдите НОД(256,320) и НОД(713,1024).

1. При помощи алгоритма Евклида вычислите: **а)** НОД(861,637); **б)** НОД(2019,7813); **в)** НОД(121,759).

2. Найдите: **а)** НОД$(n, n + 1)$; **б)** НОД$(2n, 2n + 2)$; **в)** НОД$(3n, 6n + 3)$; **г)** НОД$(2n + 13, n + 7)$.

3. Докажите, что дробь $\dfrac{12n + 1}{30n + 2}$ несократима ни при каких натуральных n.

4. Натуральные числа m и n – взаимно просты. Какие значения может принимать НОД чисел $4m+3n$ и $6m + 5n$?

5. Найдите: **а)** НОД$(10^7 - 1, 10^5 - 1)$; **б)** НОД$(\underbrace{11\ldots1}_{m}, \underbrace{11\ldots1}_{n})$; **в)** НОД$(a^m - 1, a^n - 1)$ при $a \neq 1$.

6. На доске написаны числа a и b. Ваня заменяет одно из чисел на сумму или разность написанных чисел. Какое минимальное натуральное число он может получить за несколько таких операций, если: **а)** $a = 1001, b = 759$; **б)** $a = 7n + 3, b = 11n + 5$; **в)** $a = 6n^2 + 9n + 3, b = n + 1$.

7. В прямоугольнике с целыми сторонами m и n, нарисованном на клетчатой бумаге, проведена диагональ. **а)** Через какое число узлов она проходит? **б)** На сколько частей эта диагональ делится линиями сетки?