Математические кружки МПГУ **9 ноября 2019 года**

8-9 классы

НОД и НОК

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел a и b* – это наибольшее натуральное число c со свойством $a \,\vdots\, c$, $b \,\vdots\, c$. Обозначается НОД(a, b) или просто (a, b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.

Определение. *Наименьшее общее кратное целых чисел a и b* – это наименьшее натуральное число с со свойством $c \,\vdots\, a$, $c \,\vdots\, b$. Обозначается НОК(a, b) или $[a, b]$. Аналогично определяется НОК нескольких целых чисел.

Теорема 1. *Пусть числа a и b разложены на простые множители: $a = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, $b = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, где $m_i \geq 0$, $n_i \geq 0$. Тогда их НОД и НОК можно найти по формулам:*

$$\text{НОД}(a, b) = p_1^{\min\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{m_k, n_k\}},$$

$$\text{НОК}(a, b) = p_1^{\max\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{m_k, n_k\}}.$$

Теорема 2. *Для любых двух целых чисел a и b имеет место равенство*

$$\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b.$$

1. Вычислите (без калькулятора!): а)$(9, 81)$ и $[9, 81]$; б) $(64, 136)$ и $[64, 136]$; в) $(343, 325531)$ и $[48; 167]$; г) $(2^4 \cdot 3^{25} \cdot 7^{11}, 2^{21} \cdot 3^3 \cdot 11^7)$ и $[2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3]$.

2. Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объёма, во втором – $\frac{2}{3}$ объёма, а в третьем — $\frac{5}{7}$ его объёма. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме бака это возможно?

3. Ровно в полдень Клайв закрасил число 12 на циферблате часов красным цветом и решил через каждые 57 часов закрашивать текущий час в красный цвет. а) Сколько чисел окажутся покрашенными через месяц? б) А если Клайв будет красить их каждый 1913-й час в течение всей жизни?

4. а) Про натуральные числа a и b известно, что $15 \cdot a = 14 \cdot b$ и $(a, b) = 13$. Найдите a и b. б) Пусть a и b — целые числа, удовлетворяющие равенству $56 \cdot a = 65 \cdot b$. Докажите, что $a + b$ – составное число.

5. ab – натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на $a \cdot b$. Докажите, что $a = b$.

6. а) Объясните, почему в теореме 1 можно считать, что числа a и b имеют один и тот же набор простых множителей $p_1, \ldots, p_k$. (Обратите внимание, что некоторые m_i и n_i могут быть равны нулю!) б) Докажите теорему 1. в) С помощью теоремы 1 докажите теорему 2. г) Когда НОК$(a, b) = a \cdot b$?