

8-9 классы

Доказательства от противного и принцип Дирихле

Теорема 1 (принцип Дирихле). Если по n клеткам посадить хотя бы $n + 1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит больше одного кролика.

Теорема 2 (обобщенный принцип Дирихле). Если по n клеткам посадить более $k \cdot n$ кроликов, то найдется клетка, где сидит больше k кроликов.

0. а) В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся хотя бы двое, у которых фамилия начинается с одной буквы. б) При каком наименьшем количестве учеников в школе среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

1. На 25 страницах книги 102 опечатки. Докажите, что на одной из них не менее 5 опечаток.

2. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро – братья.

3. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных две партии: одну белыми фигурами, другую – чёрными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью – $\frac{1}{2}$ очка, за поражение – 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

4. Докажите, что найдутся двадцать москвичей, имеющих одинаковое число волос на голове. (Известно, что у человека на голове не более 400000 волос, а в Москве не менее 8 миллионов жителей.)

5. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал пять открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

6. На кружок пришло 60 учеников. Оказалось, что среди каждых десяти из них есть не меньше трёх одноклассников. Докажите, что среди кружковцев найдётся по меньшей мере 15 учеников, которые учатся в одном классе.

7. Найдутся ли такие три натуральных числа, что сумма каждых двух из них – степень тройки?