

Определение. Граф называется *связным*, если из любой его вершины можно пройти в любую другую по рёбрам графа.

Определение. Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались (кроме как в вершинах).

Определение. Для связного планарного графа введём такие обозначения:

V – число его вершин;

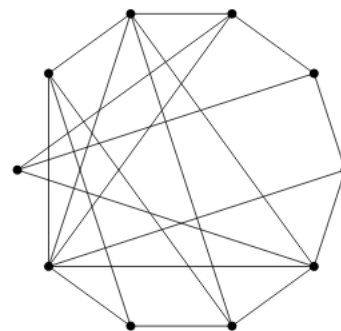
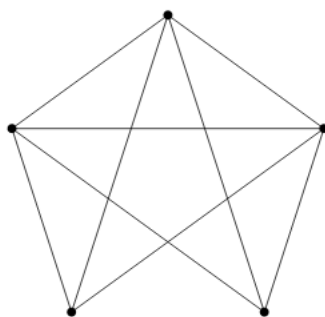
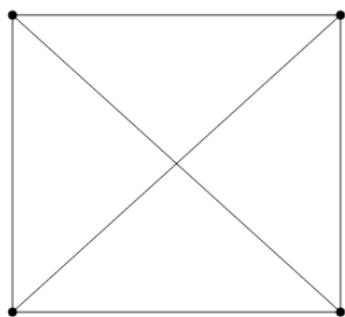
P – число его рёбер;

Γ – число кусков, на которые он разделит плоскость, если нарисовать его без пересечений рёбер (число граней). (Куски считаются с учетом внешней области. Например, для полного графа из трёх вершин $\Gamma = 2$).

Для любого связного планарного графа выполнена следующая *формула Эйлера*:

$$V - P + \Gamma = 2$$

1. Докажите, что представленные на рисунках ниже графы являются планарными:



2. В стране Озёрная семь озёр, соединённых между собой десятью непересекающимися каналами, причём от каждого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

3. Во вписанном 100-угольнике провели несколько диагоналей. Они разбили многоугольник на 200 частей: 30 пятиугольников, 70 четырёхугольников и 100 треугольников. Найдите число точек пересечения проведённых диагоналей внутри 100-угольника.

4. Внутри квадрата отметили n точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько провели отрезков и сколько получилось треугольников?

5. Докажите формулу Эйлера: $V - P + \Gamma = 2$. Для этого **а)** докажите, что в каждом связном графе есть либо висячая вершина (то есть вершина, из которой выходит ровно 1 ребро), либо ребро, после удаления которого граф останется связным; **б)** докажите, что при удалении из связного планарного графа такой вершины (вместе с выходящим из неё ребром) либо такого ребра значение $V - P + \Gamma$ не изменится; **в)** поудаляв все такие вершины и рёбра, завершите доказательство формулы Эйлера.

6. **а)** Докажите, что если из каждой вершины графа выходит хотя бы три ребра, то $2P \geq 3V$.

б) Докажите, что если в связном планарном графе есть хотя бы два ребра, то $2P \geq 3\Gamma$.

в) Докажите, что для связного планарного графа, в котором есть хотя бы два ребра, справедливо неравенство $P \leq 3V - 6$.

7. Докажите, что полный граф с пятью вершинами не является планарным. (Такой граф обычно обозначается как K_5 .)

8. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались? (Такой граф обозначается обычно как $K_{3,3}$.)