

Полуинвариант – величина, меняющаяся *монотонно* при некотором процессе.

0. В клетки прямоугольной таблицы вписаны числа. Разрешается одновременно поменять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел в любой строке и любом столбце неотрицательны.

1. В каждой из нескольких стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран A может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих со страной A стран правит не та партия, которая правит в стране A . Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

2. В парламенте у каждого депутата не больше трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого депутата будет не больше одного врага в своей палате.

3. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если "пачка" состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

4. На доске записаны несколько чисел. За один ход разрешается любые два из них a и b , одновременно не равные нулю, заменить на числа $a - \frac{b}{2}$ и $b + \frac{a}{2}$. Можно ли через несколько таких ходов получить на доске исходные числа?

5. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

6. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр "01" заменять на набор цифр "1000". Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?