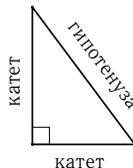


Пифагоровы тройки

Определение: Набор натуральных чисел (a, b, c) называется пифагоровой тройкой, если $a^2 + b^2 = c^2$. Прямоугольный треугольник, длины сторон которого образуют пифагорову тройку, называется пифагоровым треугольником. Самая длинная сторона прямоугольного треугольника называется гипотенузой, две другие – катетами.



1. Зная длины двух сторон пифагорова треугольника, найдите длину третьей стороны и выясните, какая из сторон является гипотенузой:

а) 3 и 5; б) 24 и 25; в) 8 и 15; г) 5 и 13; д) 9 и 41.

2. Приведите пример пифагорова треугольника с заданной длиной гипотенузы:

а) 15; б) 39; в) 100; г) 289.

3. Докажите, что пифагоровых троек бесконечно много.

4. Может ли пифагорова тройка состоять из трёх нечётных чисел?

5. а) Какие остатки от деления на 4 могут давать квадраты целых чисел?

б) Могут ли оба катета пифагорова треугольника иметь нечетные длины?

6. В некотором пифагоровом треугольнике длины сторон – взаимно простые числа (такой пифагоров треугольник называется примитивным). Докажите, что длина гипотенузы нечётна, а длины катетов – разной чётности.

7. Докажите, что для любого нечётного числа, кроме 1, существует пифагорова тройка, содержащая это число.

Подсказка: воспользуйтесь формулой разности квадратов

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

8. Сколько существует пифагоровых треугольников, в которых один из катетов равен: а) 7; б) 15; в) 1; г) 4; д) 6?

9. Будем говорить, что пифагоровы тройки (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) подобны, если $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$. Докажите, что существует бесконечно много пифагоровых троек, не подобных друг другу.

10. Докажите, что в пифагоровом треугольнике: а) длина одного из катетов делится на 3; б) длина одной из трёх сторон делится на 5; в) произведение длин катетов делится на 12.