Математический кружок **10 ноября 2018**
7 класс **МПГУ**

Ошибочные рассуждения

В этом листке потребуется не только решить задачи, но ещё и разобраться, почему приведённые рассуждения ошибочны.

1. Продавец продаёт шапку за 10 рублей. Подходит покупатель, меряет и согласен взять, но у него есть только банкнота в 25 рублей. Продавец отсылает мальчика с этими 25 рублями к соседке разменять. Мальчик прибегает и отдаёт две банкноты по 10 рублей и одну в 5 рублей. Продавец отдаёт шапку и сдачу 15 рублей. Через какое-то время приходит соседка и говорит, что 25 рублей фальшивые, требует отдать ей деньги. Ну что делать, продавец лезет в кассу и возвращает ей деньги. На сколько обманули продавца (включая стоимость шапки)?

Решение:

Соседке продавец отдал 25 рублей. Стоимость шапки – 10 рублей. Всего продавец потерял 35 рублей.

2. Три охотника варили кашу. Один положил 3 кружки крупы, второй — 2 кружки, а у третьего крупы не было. Кашу же все они съели поровну. Третий охотник сказал: "Спасибо за кашу! В благодарность я даю вам 5 патронов". Как первым двум охотникам поделить их между собой?

Решение:

Всего охотники сварили 5 кружек каши. Вклад первого охотника в кашу – $\frac{3}{5}$. Вклад второго – $\frac{2}{5}$. Значит, первый охотник должен получить $5 \cdot \frac{3}{5} = 3$ патрона, а второй охотник – $5 \cdot \frac{2}{5} = 2$ патрона.

3. Верно ли, что $n^2 + n + 41$ – простое при любом натуральном n?

Решение:

Если n равно 1, то $1^2 + 1 + 41 = 43$ – простое.
Если n равно 2, то $2^2 + 2 + 41 = 47$ – простое.
Если n равно 3, то $3^2 + 3 + 41 = 53$ – простое.
Если n равно 4, то $4^2 + 4 + 41 = 61$ – простое.
Если n равно 5, то $5^2 + 5 + 41 = 71$ – простое.
Если n равно 6, то $6^2 + 6 + 41 = 83$ – простое.
Если n равно 7, то $7^2 + 7 + 41 = 97$ – простое.
Так можно продолжать бесконечно долго, а значит $n^2 + n + 41$ всегда будет простым.

4. Верно ли, что $2 + 2 = 5$?

Решение:

Рассмотрим тождество

$$16 - 36 = 25 - 45$$

$$16 - 4 \cdot 9 = 25 - 5 \cdot 9$$

Прибавим к обеим его частям одно и то же число:

$$16 - 4 \cdot 9 + \frac{81}{4} = 25 - 5 \cdot 9 + \frac{81}{4}$$

Теперь выделим полные квадраты:

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \frac{9}{2}^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \frac{9}{2}^2$$

$$(4 - \frac{9}{2})^2 = (5 - \frac{9}{2})^2$$

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

$$4 = 5$$

$$2 + 2 = 5$$

Что и требовалось доказать.

5. Могут ли быть равны друг другу натуральные числа?

Решение:

Не могут. Докажем от противного. Предположим, что найдутся какие-нибудь два равных друг другу натуральных числа n и m.

$$n = m$$

Домножим обе части равенства на m, а затем отнимем от обеих частей равенства n^2:

$$nm = m^2.$$

$$nm - n^2 = m^2 - n^2$$

Разложим получившиеся выражения на множители:

$$n(m-n) = (n+m)(m-n).$$

$$n = n + m$$

$$m = 0$$

Но m – натуральное число, а значит $m > 0$. Противоречие. Значит, наше предположение было неверно.

6. Верно ли, что для любых n точек на плоскости существует прямая, проходящая через них?

Решение:

Докажем по индукции, что это утверждение верно.

База индукции: для $n = 1$ и $n = 2$ утверждение очевидно.

Шаг индукции: Если для n точек утверждение верно, то оно верно и для $n + 1$ точки.

Как-нибудь занумеруем заданные $n + 1$ точку. Возьмём первые n точек и, воспользовавшись для них предположением индукции, построим пряму, проходящую через них.

Теперь возьмём все точки, кроме первой и построим такую прямую для них.

Эти прямые пересекаются по всем точкам кроме первой и последней, а значит, совпадают.

Тем самым мы построили прямую, проходящую через все заданные точки.

7. Верно ли, что среди всех квадратов наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 1?

Решение:

Рассмотрим квадрат наибольшей площади, пусть его сторона равна a. Если $a < 1$, то его площадь, равная a^2, также меньше 1, а значит, меньше площади квадрата со стороной 1. Получаем противоречие. Если $a > 1$, то выполнено неравенство $a^2 < a^4$, а значит площадь нашего квадрата меньше площади квадрата со стороной, равной a^2. Вновь получаем противоречие.

Следовательно, a не меньше и не больше единицы, то есть $a = 1$.

8. Верно ли, что площадь квадрата 8×8 равна площади прямоугольника 5×13?

Решение:

Разрежем квадрат на части так, как показано на рисунке, и сложим из них прямоугольник.