Математические кружки МПГУ **31 марта 2018 года**

7 класс *Арифметика остатков*

Говорят, что два числа a и b **сравнимы по модулю** m, если разность $a-b$ делится на m ($a-b \,\vdots\, m$). *Обозначение:* $a \equiv b \pmod m$. Это также означает, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m.

Свойства сравнений. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то
1) $a+c \equiv b+d \pmod m$;
2) $ac \equiv bd \pmod m$.

0. а) Найдите остаток при делении числа 13^{100} на 4. **б)** Найдите остаток при делении числа 12^{100} на 13. **в)** Докажите, что n^3+2n делится на 3 для любого натурального n.

1. Докажите, что $21^{2017}-1 \,\vdots\, 20$.

2. Докажите, что $30^{99}+61^{100} \,\vdots\, 31$.

3. Докажите, что $n^3+5n \,\vdots\, 6$.

4. Докажите, что $n^5-n \,\vdots\, 10$.

5. Докажите, что $n^3+2 \not\vdots\, 9$.

6. Докажите, что $n^3-n \,\vdots\, 24$ при любом нечётном n.

7. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

8. a, b, c – натуральные числа, причем $a+b+c$ делится на 6. Докажите, что $a^3+b^3+c^3$ тоже делится на 6.

9. Докажите свойства сравнений, написанные в начале этого листочка.