

**Основная схема математической индукции на примере задачи:**

Пусть доминошки выставлены на ребро друг за другом. Нам необходимо доказать следующий факт: «Если толкнуть 1-ю доминошку, то для любого сколь угодно большого  $N$  доминошка с номером  $N$  когда-нибудь упадёт».

**Для доказательства понадобится установить верность двух утверждений:**

- 1) База: мы можем толкнуть первую доминошку и она упадёт.
- 2) Переход: Если падает доминошка с номером  $k$ , то она толкает доминошку с номером  $(k + 1)$ , и та тоже падает.

**0.** На плоскости проведены  $n$  прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что они разбивают плоскость на  $2n$  областей.

**1. а)** Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет. **б)** А если проведены несколько прямых и окружностей, то как доказать аналогичный факт?

**2.** Ваня нарисовал на плоскости треугольник. Серёжа провел  $n$  прямых, которые разделили треугольник на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей снова треугольник.

**3.** Рассмотрим уголок из трёх клеток. Можно ли разрезать на такие уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (может быть вырезана любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины)?

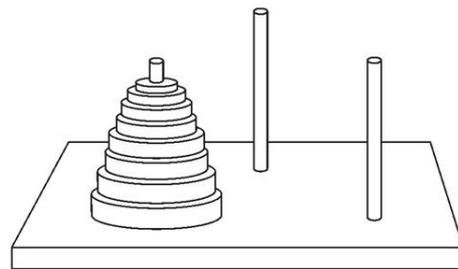
**а)**  $4 \times 4$ ; **б)**  $8 \times 8$ ; **в)**  $2^n \times 2^n$ .

**4.** У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растёт щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.

**5.** (Игра "Ханойская башня") Имеется пирамида с  $n$  кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

**а)** можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней;

**б)** это можно сделать за  $2^n - 1$  перекладываний.



**6.** В Математической стране 100 городов. Любые два города соединены напрямую либо автодорогой, либо подземной дорогой. Указом президента решено оставить либо только автодороги, либо только метро, а второй вид транспорта убрать навсегда. Докажите, что указ можно выполнить так, что при этом из любого города можно будет добраться в любой другой.

**7.** В концах диаметра окружности стоят единицы. На первом шаге каждая из получившихся дуг делится пополам, и в её середине пишется сумма чисел, стоящих в концах. Затем то же самое делается с каждой из четырёх полученных дуг и т.д. Такая операция предельвается  $n$  раз. Найти сумму всех полученных чисел.