

Путь в графе – последовательность вершин, каждая из которых соединена со следующей ребром. Предполагается, что никакое ребро при этом не повторяется.

Цикл – путь, в котором первая вершина совпадает с последней.

Граф **связный**, если между любыми двумя вершинами существует путь.

Дерево – связный граф без циклов.

1. **а)** Докажите, что граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним путём, является деревом. **б)** Докажите, что в дереве каждые две вершины соединены ровно одним путём.
2. **а)** Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется *висячей*). **б)** Докажите, что в дереве есть по крайней мере две висячие вершины. **в)** А верно ли, что в дереве есть по крайней мере три висячие вершины?
3. Докажите, что при удалении любого ребра дерево превращается в несвязный граф.
4. Докажите, что из любого связного графа можно выкинуть несколько ребёр так, что получится дерево.
5. **а)** Докажите, что дерево с n вершинами содержит $n - 1$ ребро. **б)** Докажите, что любой связный граф с n вершинами содержит по крайней мере $n - 1$ ребро. **в)** Докажите, что любой связный граф, содержащий n вершин и $n - 1$ ребро, является деревом.
6. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?
7. Есть волейбольная сетка 5×10 . Какое максимальное число веревок, её составляющих, можно разрезать так, чтобы она не распалась?