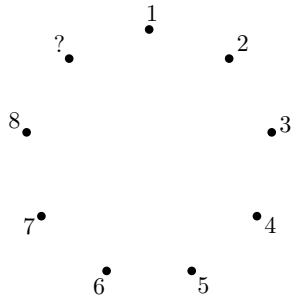




7 класс

Еще немного о графах

1. Профессор Мориарти нарисовал граф с девятью вершинами, подписал возле каждой вершины, сколько из нее выходит рёбер, но, заметив приближающегося Шерлока Холмса, попытался всё стереть. Ему удалось стереть все рёбра и одно из чисел. Увидев оставшийся рисунок, Холмс смог не только определить, сколько ребер выходило из девятой вершины, но и восстановить рисунок целиком. Повторите успех Холмса!



2. В лабиринте Минотавра нет тупиков, есть всего два входа, и на каждом перекрёстке сходится чётное число коридоров. Когда Тесей вошёл в лабиринт, вход за его спиной завалило камнями. Докажите, что он сможет выбраться из лабиринта.

Определение: Для связного планарного графа введём такие обозначения:

V – число его вершин;

E – число его рёбер;

F – число кусков, на которые он разделит плоскость, если нарисовать его без пересечений рёбер. (Куски считаются с учётом внешней области. Например, для полного графа из трёх вершин $F = 2$).

Утверждение: Для связного планарного графа верна формула Эйлера:

$$V - E + F = 2.$$

Этим утверждением можно пользоваться без доказательства.

3. Существует ли связный планарный граф, у которого

- а) вершин больше, чем ребер;
- б) граней больше чем вершин;
- в) граней больше чем ребер?

4. В треугольнике отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами исходного треугольника так, что он разбился на маленькие треугольники. Сколько получилось треугольников?

5. В шестиугольнике отметили несколько точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами шестиугольника. В результате шестиугольник разбился на шестиугольники и пятиугольники. При этом в каждой вершине получившегося графа сходятся три ребра. Сколько получилось пятиугольников?

6. В городе Эмск на каждом перекрёстке сходится шесть дорог. Докажите, что Эмск можно покинуть.

Подсказка: предположите, что это невозможно, и оцените V и F через E .

7. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались, если дело происходит на планете в форме тора.

