Формула Эйлера

Определение: Граф называется *связным*, если из любой его вершины можно пройти в любую другую по рёбрам графа.

Определение: Связный граф называется *деревом*, если в нем нет ни одного цикла (т.е. пути, конец которого совпадает с началом, а рёбра не повторяются).

1. На доске нарисованы семь графов, каждый из которых является деревом с шестью вершинами. Докажите, что среди них есть два одинаковых.

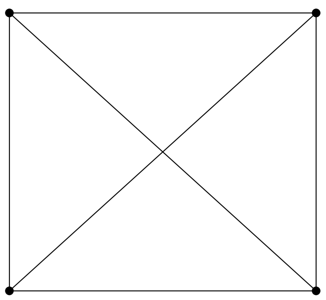
2. Назовём листом вершину графа, из которой выходит ровно одно ребро. Докажите, что у любого дерева есть листья.

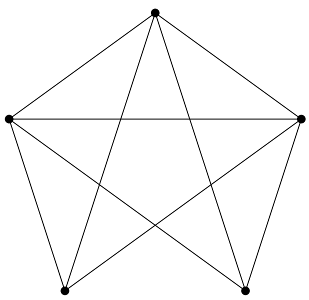
3. В нехорошей квартире комнат и дверей поровну, причём ни одна из дверей не ведёт наружу. Докажите, что в нехорошей квартире есть циклический путь по комнатам.

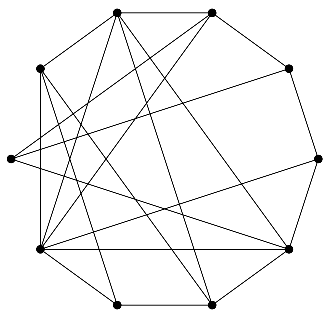
4. На доске нарисован полный (то есть такой, у которого каждая вершина соединена с каждой ребром) граф с пятью вершинами. Два игрока по очереди стирают по одному ребру. Тот, после чьего хода граф перестаёт быть связным, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

Определение: Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, что его рёбра не пересекаются.

5. Докажите, что представленные на рисунках ниже графы являются планарными:







Определение: Для связного планарного графа введём такие обозначения:
V – число его вершин;
E – число его рёбрер;
F – число кусков, на которые он разделит плоскость, если нарисовать его без пересечений рёбер. (Куски считаются с учетом внешней области. Например, для полного графа из трёх вершин $F = 2$).

6. Докажите формулу Эйлера:

$$V - E + F = 2.$$

7. а) Докажите, что если из каждой вершины графа выходит хотя бы три ребра, то

$$2E \geq 3V.$$

б) Докажите, что если в связном планарном графе есть хотя бы два ребра, то

$$2E \geq 3F.$$

8. Докажите, что полный граф с пятью вершинами не является планарным.

9. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

В следующую субботу, 9 марта 2019 года, занятия кружка пройдут как обычно. Ничего не отменяется!