

**Графом** называется множество вершин на плоскости и ребёр, их соединяющих. Будем считать, что граф не содержит петель и кратных ребёр.

**Степень вершины** – количество ребёр, выходящих из этой вершины.

**Теорема.** В любом графе сумма степеней всех вершин чётна.

1. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?
2. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
3. Могут ли степени вершин в графе быть равны: **а)** 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2; **б)** 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2; **в)** 5, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 1; **г)** 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1; **д)** 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0?
4. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
5. В стране каждые два города соединены авиалинией. Всего в ней 45 авиалиний. Сколько в стране городов?
6. В графе каждая вершина – синяя или зелёная. При этом каждая синяя вершина связана с 5 синими и 10 зелёными, а каждая зелёная – с 9 синими и 6 зелёными. Каких вершин больше – синих или зелёных?
7. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро – братья.