Математические кружки МПГУ **28 ноября 2020 года**

7-9 класс *Доказательства от противного*

В любой математической задаче что-то *дано* и что-то *требуется доказать*. Идея **метода доказательства от противного** следующая: предположить, что утверждение, которое требуется доказать, *ложно* (а значит, истинно утвеждение, *противоположное ему* по смыслу). Затем, используя это предположение и то, что дано, получить противоречие, после чего сделать вывод, что предположение неверно, а, значит, требуемое утверждение доказано.

0. Существует ли выпуклый четырёхугольник, каждая диагональ которого делит его на два остроугольных треугольника?

1. Написать утверждения, противоположные по смыслу данным. Стараться при этом не пользоваться словами «не» и «нет». (**Жирным шрифтом** описывается ситуация, а ниже — утверждения, к которым надо написать отрицания.)

а) В ящике находится сто шаров: красные, зелёные, синие.

- Среди любых 10 шаров по крайней мере 3 зелёные.
- Любой шар зелёный.
- Любые два шара разного цвета.
- Среди любых семи шаров есть два разного цвета.
- Есть два шара разного цвета.

б) Компания людей. Некоторые из них знакомы между собой.

- Есть человек, который знаком со всеми.
- Есть человек, который ни с кем не знаком.
- Среди любых 10 людей из этой компании есть хотя бы один, который знает не меньше 5 из этих десяти.
- У любых двоих из них разное количество денег.

в) Корзина с грибами.

- В корзине есть по крайней мере три ядовитых гриба.
- Не менее половины грибов в корзине – ядовитые.
- В корзине есть хотя бы один ядовитый гриб.

2. Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату — 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

3. 21 человек собирали в лесу орехи. Всего они собрали 200 орехов. Доказать, что найдутся два человека, собравшие поровну орехов.

На второй странице есть ещё задачи!

4. Имеется 82 кубика. Доказать, что среди них найдётся либо 10 кубиков разных цветов, либо 10 одноцветных кубиков.

5. Взяли несколько одинаковых правильных треугольников и в углах каждого из них написали числа 1, 2 и 3. Затем их сложили в стопку. Могло ли оказаться, что сумма чисел, стоящих в каждом углу, равна 55?

6. Докажите, что не существует такого числа, которое при делении на 21 даёт остаток 1, а при делении на 14 даёт остаток 3.

7. Существуют ли такие двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

8. Можно ли занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой?