Напоминание: разделить натуральное число N на натуральное число m с остатком – это значит представить N в виде $N = km + r$, где k и r – целые числа, причём $0 \le r < m$. При этом число r называется *остатком* от деления N на m.

-1. Найдите остатки от деления
а) $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ на 7;
б) 9^{100} на 8.

0. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 для любого натурального n.

1. а) $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3.
б) $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что $a + b$ делится на 11.

2. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

3. Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n.

4. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечетном n.

5. Найдите последнюю цифру числа 1989^{1989}.

6. Найдите последнюю цифру числа 2^{50}.

7. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

8. a, b, c – натуральные числа, причем $a+b+c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

9. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 2430. Чему может быть равно исходное число?

10. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте стоит число 37, а на втором – 1?